

Mit $N = 3,52 \cdot 10^3$ Elektronen $\cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$ bei $9,4 \cdot 10^{-8}$ Amp/cm²; $V = 50$ kV; $d = 4,3 \cdot 10^{-3}$ cm bei 50 kV; $\rho = 1,05$ g $\cdot \text{cm}^{-3}$ (Dichte für Polystyrol) ergibt sich dann:

$$\eta = 6,6 \cdot 10^6 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Da die Fluoreszenzintensitätsänderung in der Kunststoff-Folie bei obigen Bedingungen bei einer Bestrahlungszeit von etwa 10 Sek. meßbar wird, ergibt sich für die feststellbare Dosis eine untere Grenze von etwa 10^6 r.

Die Ionenausbeute bei der radiochemischen Umwandlung von Fe^{2+} - in Fe^{3+} -Ionen in wäßrigen Lösungen (etwa 21 Ionen/100 eV, entsprechend etwa 5 eV/Ion) liegt in derselben Größenordnung wie die

Zerstörungsausbeute in der Hydrochinon-dicarbon-säure-diäthylester-Polystyrolfolie. Die untere Grenze der Nachweisbarkeit der Fe^{3+} -Bildung liegt jedoch bei einigen 10^2 r. Daraus folgt, daß der Nachweis der Fe^{2+} -Oxydationsänderung wesentlich empfindlicher ist als die der Fluoreszenzänderung.

Für sein ständig förderndes Interesse und zahlreiche Ratschläge möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Hanle meinen besonderen Dank aussprechen. Ferner danke ich Herrn Privatdozent Dr. A. Schmillen für viele anregende Diskussionen, der deutschen Forschungsgemeinschaft, den Firmen E. Leitz, Wetzlar, R. Seifert, Hamburg, A. Pfeiffer, Wetzlar, Knapsack AG., Griesheim, Badische Anilin- und Soda-Fabrik, Ludwigshafen und Farbenfabriken Bayer, Leverkusen für die Überlassung von Hilfsmitteln.

Gekoppelte Wellengleichungen für inhomogene anisotrope Medien

Von KURT SUCHY *

(Z. Naturforschg. 9a, 630—636 [1954]; eingegangen am 24. April 1954)

A special system of coordinates has been introduced for the calculation of electromagnetic wave propagation in an inhomogeneous, anisotropic medium. One of the coordinate axes is parallel to the wave normal, the two others (perpendicular to it) are defined by the relation between the \mathbf{E} and $\tilde{\mathbf{D}}$ vector. In the coupled wave equations it is shown that the coupling terms can be neglected under certain conditions.

1. Aufstellung des allgemeinen Wellengleichungssystems

Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \times \gamma \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

($\gamma = c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$) wird mit dem Ansatz

$$\mathbf{D} \sim e^{-i\omega t} \sim \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

die Zeit t eliminiert und das Wellengleichungssystem

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \left(\mathbf{D} + \frac{i}{\omega} \mathbf{j} \right) = 0 \quad (3)$$

gewonnen. In den Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (4)$$

sind ϵ und σ Dyaden wegen der angenommenen Anisotropie des Mediums. Mit den Bezeichnungen

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \frac{i}{\omega} \mathbf{j}, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon + \frac{i}{\omega} \sigma \quad (5)$$

werden die Materialgleichungen (4) zu

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (6)$$

zusammengefaßt. Das Wellengleichungssystem (3) schreibt sich mit $k_0 = \omega/c$ jetzt

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{k_0^2}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{D}} \equiv -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{k_0^2}{\epsilon_0} \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (7)$$

Man hat hier ein System von 3 linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die drei \mathbf{E} -Koordinaten E_ν als abhängige Variable. In jeder der 3 Gleichungen kommen (im allgemeinen Fall) alle drei abhängigen Variablen E_ν vor. Dies kommt einerseits von der komplizierten Gestalt des Differentialausdrucks $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$, andererseits von dem dyadischen Charakter von $\tilde{\epsilon}$.

2. Vereinfachungsmöglichkeiten für das allgemeine Wellengleichungssystem

Der Differentialausdruck $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ kann, wenn es die Fragestellung des einzelnen Problems zuläßt, in gewissen Fällen vereinfacht werden, so daß er für jede Zeile im Wellengleichungssystem (7) nur noch eine abhängige Variable enthält. Es seien hier zwei wichtige Fälle angegeben:

* Freiburg (Br.), Mozartstraße 60.



a) Gelten für das benutzte Koordinatensystem (e_ν , μ_ν , g_ν) die in einer früheren Arbeit¹ vom Verfasser als Formeln (12, 05) (12, 06) aufgestellten „Krümmungsbedingungen“

$$\left| \frac{1}{g_\lambda} \frac{\partial e_\mu}{\partial u_\lambda} \times \frac{1}{g_\mu} \frac{\partial e_\nu}{\partial u_\mu} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{g_\lambda g_\mu} \frac{\partial^2 e_\nu}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} \right| \ll k_0^2 \left| \frac{\tilde{\epsilon}_{\mu\nu}}{\epsilon_0} \right|, \quad (8)$$

$$\left| \frac{1}{g_\lambda} \frac{\partial e_\mu}{\partial u_\lambda} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{g_\mu} \frac{\partial e_\nu}{\partial u_\mu} \right| \ll \left| \frac{\frac{1}{g_\lambda g_\mu} \frac{\partial^2 E_\nu}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}}{\frac{1}{g_\mu} \frac{\partial E_\nu}{\partial u_\mu}} \right|, \quad (9)$$

so wird

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \{\Delta \mathbf{E} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}\} \quad e_\kappa = \text{const.} \quad (10)$$

(Siehe (12, 07) (12, 08) in I.)

Diese Krümmungsbedingungen schränken die Krümmung der Koordinatenlinien ein (und sind für *cartesische Koordinaten* exakt erfüllt).

In einer weiteren Arbeit² [Kap. (28)] diskutierte der Verfasser die Bedingungen zur Unterdrückung des Terms $\nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$, die sich als äquivalent zur Braubarkeitsbedingung der nullten WBK-Näherung ergaben (und für *homogene Medien* exakt gelten.) Unter diesen Bedingungen reduziert sich der Differentialausdruck

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

auf $(\Delta \mathbf{E})_{e_\kappa, g_\kappa}$, der in jeder Zeile nur noch eine *E*-Koordinate enthält.

Dieser Fall a) zählt im allgemeinen nicht mehr zur „Wellenoptik“ und soll deshalb in dieser Arbeit nicht weiter in Betracht gezogen werden.

b) Man wählt ein „wellenfestes“ Koordinatensystem (\mathbf{l}_ν , v_ν , h_ν), das sich nach dem Verlauf der Wellenfortpflanzung richtet. Eine Koordinatenrichtung \mathbf{l}_1 legt man in die Richtung der „Wellennormalen“, so daß überall

$$\frac{\partial}{\partial v_2} = 0 = \frac{\partial}{\partial v_3} \quad (11)$$

wird [vgl. I, Kap. (15), S. 121]. Die Wahl der anderen beiden Koordinatenrichtungen ist noch frei.

Im allgemeinen ist der Wellennormalenverlauf unbekannt, so daß eine solche Koordinatenwahl nicht möglich ist. Nur in Fällen, wo man aus physikalischen Gründen über den Wellennorma-

lenverlauf einfache Annahmen machen kann, bringt diese Koordinatenwahl Vorteile. Z. B. beim Einfall einer Welle in ein „geschichtetes“ Medium genau senkrecht zur Schichtung [vgl. I, Kap. (15), S. 120 und Kap. (17), S. 127].

Im wellenfesten Koordinatensystem (\mathbf{l}_ν , v_ν , h_ν) wird

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \cdot \mathbf{l}_1 + \left\{ \frac{1}{h_1^2} \frac{d^2 E_2}{dv_1^2} + \left(\frac{1}{h_1 h_3} \frac{d(h_3/h_1)}{dv_1} + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{dh_1}{dv_1} \right) \frac{dE_2}{dv_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{d}{dv_1} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{dh_2}{dv_1} \right) E_2 \right\} \mathbf{l}_2 + \left\{ \frac{1}{h_1^2} \frac{d^2 E_3}{dv_1^2} + \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{d(h_2/h_1)}{dv_1} + \frac{1}{h_1^2 h_3} \frac{dh_3}{dv_1} \right) \frac{dE_3}{dv_1} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{d}{dv_1} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{dh_3}{dv_1} \right) E_3 \right\} \mathbf{l}_3. \quad (12)$$

In jeder Zeile steht nur noch höchstens eine *E*-Koordinate.

Der Ausdruck $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$ (6), in Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \\ \tilde{D}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{11} & \tilde{\epsilon}_{12} & \tilde{\epsilon}_{13} \\ \tilde{\epsilon}_{21} & \tilde{\epsilon}_{22} & \tilde{\epsilon}_{23} \\ \tilde{\epsilon}_{31} & \tilde{\epsilon}_{32} & \tilde{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

enthält im allgemeinen anisotropen Fall in jeder Zeile alle drei *E*-Koordinaten, nur in folgenden 2 Spezialfällen nicht:

1. Das Medium ist isotrop, $\tilde{\epsilon}$ wird skalar. (Dieser Fall sei im folgenden außer Betracht gelassen.)
2. Man transformiert $\tilde{\epsilon}$ in eine *Diagonaldyade*, d. h. das Koordinatensystem in ein „Hauptachsen-System“. Für hermitesches $\tilde{\epsilon}$, also für nichtabsorbierende Medien, erhält man reelle Eigenwerte. Die Eigenlösungen werden im allgemeinen komplex, somit auch das Hauptachsensystem. Für reell-symmetrische $\tilde{\epsilon}$ werden die Eigenlösungen (und damit das Hauptachsensystem) reell.

Ein Medium mit hermiteschem nicht-symmetrischem $\tilde{\epsilon}$ ist z. B. das Ionosphärenplasma ohne Berücksichtigung der Stoßdämpfung [siehe Gl. (44)]. Hierfür haben Lange-Hesse³ und Davids⁴ die Hauptachsentransformation durchgeführt. Reell-symmetrisches $\tilde{\epsilon}$ haben z. B. die Kristalle.

Es wird nur in Ausnahmen der Fall eintreten, daß das *Hauptachsensystem* mit dem unter b) aufgeführten *wellenfesten Koordinatensystem* übereinstimmt. Im allgemeinen Fall hat man die Wahl,

¹ K. Suchy, Ann. Phys., Lpz. **11**, 113 [1952]; Berichtigung dazu Ann. Phys., Lpz. **12**, 423 [1953]; diese Arbeit wird im folgenden als I bezeichnet.

² K. Suchy, Ann. Phys., Lpz. **13**, 178 [1953].

³ G. Lange-Hesse, Arch. elekt. Übertragung **6**, 149 [1952].

⁴ N. Davids, J. Geophys. Res. **58**, 311 [1953].

durch eine Koordinatentransformation entweder aus $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ oder aus $\tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ störende \mathbf{E} -Koordinaten zu eliminieren.

Die \mathbf{E} -Koordinaten kommen in $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ als Ableitungen vor, in $\tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ nur als Faktoren. Sie machen sich also in $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ störender bemerkbar als in $\tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$. Man wird daher versuchen, in einem wellenfesten Koordinatensystem zu rechnen, um $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ möglichst einfach darzustellen.

3. Wellengleichungssystem in wellenfesten Koordinaten

Mit dem Ausdruck (12) für $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ im wellenfesten Koordinatensystem (l_ν, v_ν, h_ν) wird das Wellengleichungssystem (7) zu

$$\tilde{D}_1 \equiv \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} E_2'' + \left[\frac{(h_3/h_1)'}{h_1 h_3} + \frac{h_2'}{h_1^2 h_2} \right] E_2' \\ + \left\{ \frac{(h_3 h_2')'}{h_1 h_2} \right\} E_2 + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \tilde{D}_2 \quad (15) \\ \equiv \frac{1}{h_1^2} E_2'' + [2] E_2' + \{2\} E_2 + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} (\tilde{\varepsilon}_{21} E_1 + \tilde{\varepsilon}_{22} E_2 \\ + \varepsilon_{23} E_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} E_3'' + \left[\frac{(h_2/h_1)'}{h_1 h_2} + \frac{h_3'}{h_1^2 h_3} \right] E_3' \\ + \left\{ \frac{(h_2 h_3')'}{h_1 h_3} \right\} E_3 + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \tilde{D}_3 \quad (16) \\ \equiv \frac{1}{h_1^2} E_3'' + [3] E_3' + \{3\} E_3 + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} (\tilde{\varepsilon}_{31} E_1 + \tilde{\varepsilon}_{32} E_2 \\ + \tilde{\varepsilon}_{33} E_3) = 0. \end{aligned}$$

Man kann nun E_1 in den beiden letzten Gln. (15), (16) mit Hilfe der ersten (14) eliminieren (Feinstein⁵) und sieht somit, daß man ein Problem mit nur noch 2 abhängig Variablen E_2 und E_3 hat. Es sind dies die \mathbf{E} -Koordinaten in der (l_2, l_3) -Fläche senkrecht zur Wellennormalen l_1 .

Die Koordinatenrichtungen l_2 und l_3 (senkrecht zu l_1) sind im einzelnen noch wählbar. Durch ihre Festlegung ergeben sich 2 Möglichkeiten der weiteren Behandlung:

I. Man führt die eben erwähnte Elimination von E_1 durch und erhält das System zweier gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} E_2'' + [2] E_2' + \left\{ \{2\} + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{22}}{\varepsilon_0} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{21} \tilde{\varepsilon}_{12}}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{11}} \right) \right\} E_2 \\ + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{23}}{\varepsilon_0} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{21} \tilde{\varepsilon}_{13}}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{11}} \right) E_3 = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} E_3'' + [3] E_3' + \left\{ \{3\} + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\varepsilon_0} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{31} \tilde{\varepsilon}_{13}}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{11}} \right) \right\} E_3 \\ + k_0^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{32}}{\varepsilon_0} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{31} \tilde{\varepsilon}_{12}}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{11}} \right) E_2 = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Kann man die Maßzahlen $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}$ durch Festlegung der Koordinatenrichtungen l_2 und l_3 so gestalten, daß die Kopplungsglieder verschwinden, d. h.

$$\tilde{\varepsilon}_{11} \tilde{\varepsilon}_{23} - \tilde{\varepsilon}_{21} \tilde{\varepsilon}_{13} = 0 = \tilde{\varepsilon}_{11} \tilde{\varepsilon}_{32} - \tilde{\varepsilon}_{31} \tilde{\varepsilon}_{12} \quad (19)$$

wird, so bekommt man zwei gewöhnliche Diff.-Gln. für je eine abhängig Variable E_2 bzw. E_3 . Im allgemeinen wird dies im anisotropen Medium nicht möglich sein und man hat das gekoppelte System (17), (18) zu lösen.

II. Durch die Materialgleichung $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ (6) wird an jedem Ort für ein bestimmtes \mathbf{E} ein dazugehöriges $\tilde{\mathbf{D}}$ festgelegt. Wegen der Anisotropie des Mediums ist $\tilde{\varepsilon}$ dyadisch angenommen und die Richtungen der zusammengehörigen \mathbf{E} - und $\tilde{\mathbf{D}}$ -Vektoren sind im allgemeinen verschieden (Abb. 1).

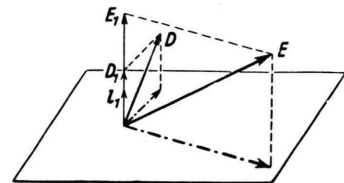


Abb. 1.

Läßt man (an einem festen Ort) den \mathbf{E} -Vektor alle möglichen Richtungen einnehmen und verfolgt dabei seine Projektion auf die Koordinatenfläche senkrecht zu l_1 , so findet man zwei Projektionsrichtungen des \mathbf{E} -Vektors, die mit den Projektionsrichtungen des dazugehörigen $\tilde{\mathbf{D}}$ -Vektors übereinstimmen. In diese Richtungen legt man die Koordinatenrichtungen l_2 und l_3 (vgl. Försterling⁶, Rydbeck⁷). Physikalisch hat man in diesen Richtungen eine Art Teilisotropie (Davids⁸) (Abb. 2).

Wie im folgenden ausgeführt wird, erhält man hierbei (wie unter I) ebenfalls ein System zweier gekoppelter Diff.-Gln. Es ist jedoch (im Gegensatz

⁵ J. Feinstein, Ionospheric wave propagation at low frequencies, Paper No. 60, URSI General Assembly, Zürich (1950).

⁶ K. Försterling, Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik **59**, 10 [1942].

⁷ O. Rydbeck, Trans. Chalmers Univ. Tech., Gothenburg, Nr. **34** [1944].

⁸ N. Davids, J. Atmos. Terr. Phys. **2**, 324 [1952].

zu I) möglich, die Kopplungsglieder weitgehend zu unterdrücken und somit zwei Diff.-Gln. für je eine abhängige Variable zu gewinnen.

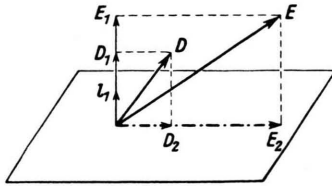


Abb. 2.

4. Transformation des wellenfesten Koordinatensystems auf die Teilisotropie-richtungen

Die Koordinatenrichtungen l_2 und l_3 (senkrecht zu l_1) sollen so gelegt werden, daß

$$\tilde{D}_2 = w \varepsilon_0 E_2, \quad (20)$$

$$\tilde{D}_3 = w \varepsilon_0 E_3. \quad (21)$$

Zusammen mit der Auswahlbedingung

$$\tilde{D}_1 = 0 \quad (14)$$

für die Koordinatenrichtung l_1 hat man also das Transformationsproblem

$$\{w \varepsilon_0 [l_2 l_2 + l_3 l_3] - \tilde{\varepsilon}\} \cdot E = 0 \quad (22)$$

für das Auffinden der Koordinatenrichtungen (= Teilisotropie-richtungen) l_2 und l_3 zu lösen. In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 0 - \tilde{\varepsilon}_{11} & -\tilde{\varepsilon}_{12} & -\tilde{\varepsilon}_{13} \\ -\tilde{\varepsilon}_{21} & w \varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{22} & -\tilde{\varepsilon}_{23} \\ -\tilde{\varepsilon}_{31} & -\tilde{\varepsilon}_{32} & w \varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

Lösungsbedingung für dieses lineare Gleichungssystem ist das Verschwinden der Koeffizienten-Determinante. Dies führt auf eine quadratische Gleichung für w . Für die beiden Lösungen w_{\pm} ergeben sich aus den Unterdeterminanten der Matrix von $\{w \varepsilon_0 [l_2 l_2 + l_3 l_3] - \tilde{\varepsilon}\}$ zwei Verhältnisse $(E_3/E_2)_{\pm}$, wodurch die beiden Koordinatenrichtungen (= Teilisotropie-richtungen) l_2 und l_3 festgelegt werden.

Formal dasselbe Problem behandelte der Verfasser in I. Dem Transformations-Gleichungssystem (22), (23) entsprach das *Polarisationsgleichungssystem* (17, 24), dem Verschwinden der Koeffizienten-Determinante die *Doppelbrechungsgleichung* (17, 12). Als Lösung ergab sich (17, 16)

$$w_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}_{12}^2 + \tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{11}} \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{12}^2 - \tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{11}} \right)^2 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{13}^2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{21}^2}{\varepsilon_0^2 \tilde{\varepsilon}_{11}^2}} \quad (24)$$

mit (16, 18)

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}^{\kappa\lambda} = \begin{vmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\kappa\mu} & \tilde{\varepsilon}_{\kappa\nu} \\ \tilde{\varepsilon}_{\lambda\mu} & \tilde{\varepsilon}_{\lambda\nu} \end{vmatrix}, \quad (25)$$

ferner (19, 03)

$$\left(\frac{E_3}{E_2} \right)_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}_{12}^2 - \tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_0^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{12}^2 - \tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_0^2} \right)^2 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_{21}^2}} \quad (26)$$

mit (19, 04)

$$\left(\frac{E_3}{E_2} \right)_{+} \cdot \left(\frac{E_3}{E_2} \right)_{-} = -\frac{\tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_{21}^2}. \quad (27)$$

Ist $E_{23} = E_2 + E_3$ die E -Komponente senkrecht zu l_1 , so sind durch

$$\left(\frac{E_3}{E_2} \right)_{\pm} = \tan \alpha_{\pm} \quad (28)$$

die beiden Winkel α_{\pm} des neuen Koordinatensystems (l_1, l_+, l_-) relativ zum alten (l_1, l_2, l_3) festgelegt (Abb. 3).

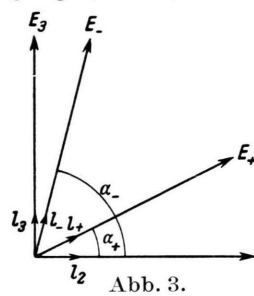


Abb. 3.

Für das Produkt der Tangensfunktionen der Winkel α_+ und α_- ergibt sich aus (27) sofort

$$\tan \alpha_+ \cdot \tan \alpha_- = -\frac{\tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_{21}^2}. \quad (29)$$

Nennt man $E_+ - E_- = E_{23}$ im neuen Koordinatensystem,

so lauten die Transformationsformeln

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_+ & \cos \alpha_- \\ \sin \alpha_+ & \sin \alpha_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\alpha_- - \alpha_+)} \begin{pmatrix} \sin \alpha_- & -\cos \alpha_- \\ -\sin \alpha_+ & \cos \alpha_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Transformiert man den Vektor $\tilde{D}_{23} = \tilde{D}_2 + \tilde{D}_3$ auf dieselbe Weise in $\tilde{D}_{+-} = \tilde{D}_+ + \tilde{D}_-$, so hat man die Materialgleichung $\tilde{D} = \tilde{\varepsilon} \cdot E$ (6) auf Grund der speziellen Koordinatenwahl in der einfachen Form

$$\tilde{D}_{\pm} = w_{\pm} \varepsilon_0 E_{\pm}. \quad (31)$$

5. Transformation des Koordinatensystems auf orthogonale Teilisotropie-richtungen

Besonders einfach werden die Transformationsformeln (30), wenn die beiden Koordinatenachsen (= Teilisotropie-richtungen) l_+ und l_- aufeinander senkrecht stehen, also wenn die „Orthogonalitätsbedingung“

$$\tan \alpha_+ \cdot \tan \alpha_- \equiv -\frac{\tilde{\varepsilon}_{13}^2}{\varepsilon_{21}^2} = -1 \quad (32)$$

erfüllt ist (Abb. 4).

Die Transformationsformeln (30) für *orthogonale Teilisotropierichtungen* l_{\pm} sind (wegen $\alpha_+ = \alpha_- - \pi/2 \equiv \alpha$)

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Die Orthogonalitätsbedingung (32) lautet ausgeschrieben

$$\tilde{\epsilon}_{11} (\tilde{\epsilon}_{23} - \tilde{\epsilon}_{32}) - \tilde{\epsilon}_{21} \tilde{\epsilon}_{13} + \tilde{\epsilon}_{12} \tilde{\epsilon}_{31} = 0. \quad (34)$$

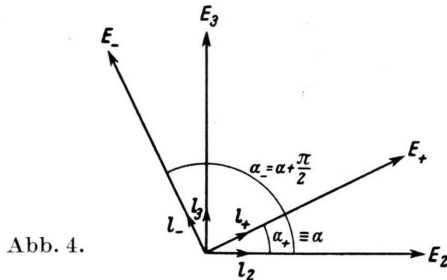


Abb. 4.

Hinreichend für die Orthogonalität ist z. B.

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\nu} = \tilde{\epsilon}_{\nu\mu}, \quad (35)$$

also ein symmetrisches $\tilde{\epsilon}$, wie es z. B. für Kristalle gilt. Man hat also in Kristallen immer orthogonale Teilisotropierichtungen.

In dem physikalisch wichtigen Fall

$$\operatorname{tg} \alpha_+ \cdot \operatorname{tg} \alpha_- \equiv -\frac{\tilde{\epsilon}_{13}^{21}}{\tilde{\epsilon}_{21}^{13}} = +1 \quad (36)$$

kann man ebenfalls einfache Transformationsformeln erhalten, wenn man nicht den Vektor $E_{23} = E_2 + E_3$, sondern seine *Darstellung durch die komplexe Größe* $\overline{E_{23}} = E_2 + iE_3$ transformiert. Rechnet man nämlich mit iE_3 anstatt mit E_3 , so wird mit

$$\left(\frac{iE_3}{E_2} \right)_{\pm} = \operatorname{tg} \beta_{\pm} \quad (37)$$

(Davids⁹) aus (36) die „*Quasiorthogonalitätsbedingung*“

$$\operatorname{tg} \beta_+ \cdot \operatorname{tg} \beta_- \equiv +\frac{\tilde{\epsilon}_{13}^{21}}{\tilde{\epsilon}_{21}^{13}} = -1. \quad (38)$$

Hierbei ist $\beta_+ = \beta_- - \pi/2 \equiv \beta$ der Winkel des neuen, hier auch orthogonalen Koordinatensystems relativ zum alten (Abb. 5).

Nennt man $\Pi = \Pi_+ + i\Pi_-$ die komplexe Größe $\overline{E_{23}}$ im neuen Koordinatensystem, so lauten die Transformationsformeln

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_+ \\ \Pi_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Pi_+ \\ \Pi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Transformiert man die komplexe Größe $\tilde{D}_{23} = \tilde{D}_2 + i\tilde{D}_3$ auf dieselbe Weise in $\Psi = \Psi_+ + i\Psi_-$, so hat man anstatt $\tilde{D} = \tilde{\epsilon} \cdot E$ (6) im neuen Koordinatensystem

$$\Psi_{\pm} = w_{\pm} \epsilon_0 \Pi_{\pm}. \quad (40)$$

Die Quasiorthogonalitätsbedingung (38) lautet ausgeschrieben

$$\tilde{\epsilon}_{11} (\tilde{\epsilon}_{23} + \tilde{\epsilon}_{32}) - \tilde{\epsilon}_{21} \tilde{\epsilon}_{13} - \tilde{\epsilon}_{12} \tilde{\epsilon}_{31} = 0. \quad (41)$$

Hinreichend hierfür ist z. B.

$$\tilde{\epsilon}_{23} = -\tilde{\epsilon}_{32} \quad \tilde{\epsilon}_{32} = -\tilde{\epsilon}_{23} \quad (42)$$

$$\tilde{\epsilon}_{21} = -\tilde{\epsilon}_{12} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\epsilon}_{31} = -\tilde{\epsilon}_{13} \quad (43)$$

$$\tilde{\epsilon}_{13} = +\tilde{\epsilon}_{31} \quad \tilde{\epsilon}_{12} = +\tilde{\epsilon}_{21}.$$

Diese hinreichenden Bedingungen werden z. B. erfüllt durch ein $\tilde{\epsilon}$ der Form

$$\tilde{\epsilon} = aI + b\mathbf{v}\mathbf{v} + c\mathbf{v} \times I \quad (44)$$

mit $\mathbf{v}_2 = 0$ bzw. $\mathbf{v}_3 = 0$. (I ist die Einheitsdyade.)

Ein Plasma unter Magnetfeldeinfluß (Ionosphäre) hat ein $\tilde{\epsilon}$ der obigen Form (44) (Eckersley¹⁰), wobei der Vektor \mathbf{v} in Magnetfeldrichtung zeigt.

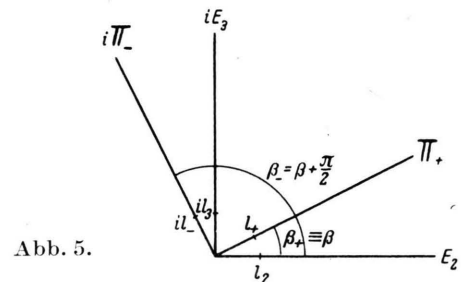


Abb. 5.

6. Transformation des Wellengleichungssystems in wellenfesten Koordinaten auf die Teilisotropierichtungen

In wellenfesten Koordinaten wurde das Wellengleichungssystem (7) in die Form (14), (15), (16) gebracht. Mit der Transformation (30) auf die Teilisotropierichtungen bekommen die Gleichungen (15) (16) die Form

$$\begin{aligned} \cos \alpha_+ \left\{ \frac{E_+''}{h_1^2} + [2] E_+' + \left(\{2\} - \frac{\alpha_+'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_+ \right) E_+ \right\} - \sin \alpha_- \left[\frac{2\alpha_-'}{h_1^2} E_-' + \left(\frac{\alpha_-''}{h_1^2} + [2] \alpha_-' \right) E_- \right] \\ + \cos \alpha_- \left\{ \frac{E_-''}{h_1^2} + [2] E_-' + \left(\{2\} - \frac{\alpha_-'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_- \right) E_- \right\} - \sin \alpha_+ \left[\frac{2\alpha_+'}{h_1^2} E_+' + \left(\frac{\alpha_+''}{h_1^2} + [2] \alpha_+' \right) E_+ \right] = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

⁹ N. Davids, J. Geophys. Res. **56**, 611 [1951].

¹⁰ T. L. Eckersley, Proc. Phys. Soc., Lond. **63**, 49 [1949].

$$\begin{aligned} & \sin \alpha_- \left\{ \frac{E''_+}{h_1^2} + [3] E'_- + \left(\{3\} - \frac{\alpha_-'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_- \right) E_- \right\} + \cos \alpha_+ \left[\frac{2 \alpha'_+}{h_1^2} E'_+ + \left(\frac{\alpha''_+}{h_1^2} + [3] \alpha'_+ \right) E_+ \right] \\ & + \sin \alpha_+ \left\{ \frac{E''_-}{h_1^2} + [3] E'_+ + \left(\{3\} - \frac{\alpha_+'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_+ \right) E_+ \right\} + \cos \alpha_- \left[\frac{2 \alpha'_-}{h_1^2} E'_- + \left(\frac{\alpha''_-}{h_1^2} + [3] \alpha'_- \right) E_- \right] = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Um dieses recht komplizierte Gleichungssystem zu vereinfachen, seien folgende Annahmen gemacht:

1. Annahme:

$$[2] \approx [3], \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \text{d. h. } & \left[\frac{(h_3/h_1)'}{h_1 h_3} + \frac{h_2'}{h_1^2 h_2} \right] \approx \left[\frac{(h_2/h_1)'}{h_1 h_2} + \frac{h_3'}{h_1^2 h_3} \right], \\ \{2\} \approx \{3\}, \text{ d. h. } & \left\{ \frac{(h_3 h_2')'}{h_1 h_3} \right\} \approx \left\{ \frac{(h_2 h_3')'}{h_1 h_2} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Hierdurch werden der geometrischen Struktur des Koordinatensystems Bedingungen auferlegt. Sie sollen deshalb „Koordinatenbedingungen“ genannt werden.

Betrachtet man cartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten wie in I auf S. 122, so wird für cartesische Koordinaten

$$[2] = 0 = [3], \quad \{2\} = 0 = \{3\}, \quad (49)$$

für Zylinderkoordinaten

$$[2] = \frac{1}{q} = [3], \quad \{2\} = -\frac{1}{q^2} \neq 0 = \{3\}, \quad (50)$$

für Kugelkoordinaten

$$[2] = \frac{2}{r} = [3], \quad \{2\} = 0 = \{3\}. \quad (51)$$

Gelten die Krümmungsbedingungen (8) und (9), so gilt (49), wie aus (10) zu entnehmen ist.

Hinreichend für die Erfüllung der Koordinatenbedingungen (47) und (48) ist also z. B. die Verwendung von cartesischen oder Kugelkoordinaten oder auch die Geltung der Krümmungsbedingungen (8) und (9). Für Zylinderkoordinaten sind die Koordinatenbedingungen nicht erfüllt.

2. Annahme:

$$\left| \frac{\alpha_\pm'^2}{h_1^2} \right| \text{ und } \left| \frac{\alpha_\pm''}{h_1^2} \operatorname{tg} \alpha_\pm \right| \ll k_0^2 |w_\pm|, \quad (52)$$

$$|2 \alpha_\pm' \operatorname{tg} \alpha_\pm| \ll \left| \frac{E''_\pm}{E'_\pm} \right|, \quad (53)$$

$$|\alpha_\pm' \operatorname{tg} \alpha_\pm| \ll \left| \frac{E'_\pm}{E_\pm} \right|, \text{ wenn } [2, 3] \neq 0. \quad (54)$$

Diese Bedingungen schränken α'_\pm ein, d. h. die Drehung der Teilisotropierichtungen beim Fortschreiten der Welle. Sie sollen deshalb „Rotationsbedingungen“ genannt werden.

Dem formalen Aufbau nach kann man die Rotationsbedingungen (52) und (53) mit den Krümmungsbedingungen (8) und (9) vergleichen. In ihrer physikalischen Bedeutung entsprechen sie etwa den „Polarisationsbedingungen“ (14, 03) in I.

In einem homogenen Medium ist $\bar{\epsilon}$ örtlich konstant, nach (26) und (28) auch α_\pm . Dann verschwindet α'_\pm und die Rotationsbedingungen gelten exakt.

Gelten Koordinaten- und Rotationsbedingungen, so wird aus den Gln. (45) und (46) das System

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_+ & \cos \alpha_- \\ \sin \alpha_+ & \sin \alpha_- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\{ \frac{E''_+}{h_1^2} + [] E'_+ + (\{ \} + k_0^2 w_+) E_+ \right\} \\ \left\{ \frac{E''_-}{h_1^2} + [] E'_- + (\{ \} + k_0^2 w_-) E_- \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

mit der Trivallösung

$$\frac{E''_\pm}{h_1^2} + [] E'_\pm + (\{ \} + k_0^2 w_\pm) E_\pm = 0 \quad (56)$$

als einziger Lösung (für $\alpha_\pm \neq 0$). Man hat hier zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen für E_+ und E_- .

7. Transformation des Wellengleichungssystems auf orthogonale Teilisotropierichtungen

Gilt die Orthogonalitätsbedingung $\operatorname{tg} \alpha_+ \cdot \operatorname{tg} \alpha_- = -1$ (32), also $\alpha_+ = \alpha_- - \pi/2 \equiv \alpha$, so kann man die allgemeinen Gln. (45) und (46) allein durch die Koordinatenbedingungen (47) und (48) zum System

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\{ \frac{E''_+}{h_1^2} + [] E'_+ + \left(\{ \} - \frac{\alpha'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_+ \right) E_+ \right\} - \left[\frac{2 \alpha'}{h_1^2} E'_- + \left(\frac{\alpha''}{h_1^2} + [] \alpha' \right) E_- \right] \\ \left\{ \frac{E''_-}{h_1^2} + [] E'_- + \left(\{ \} - \frac{\alpha'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_- \right) E_- \right\} + \left[\frac{2 \alpha'}{h_1^2} E'_+ + \left(\frac{\alpha''}{h_1^2} + [] \alpha' \right) E_+ \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

zusammenfassen mit der (für $\alpha \neq 0$) einzigen Lösung

$$\frac{E_{\pm}''}{h_1^2} + [\] E_{\pm}' + \left(\{ \} - \frac{\alpha'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_{\pm} \right) E_{\pm} \mp \left[\frac{2\alpha'}{h_1^2} E_{\mp}' + \left(\frac{\alpha''}{h_1^2} + [\] \alpha' \right) E_{\mp} \right] = 0. \quad (58)$$

Man hat hierbei zwei Diff.-Gln. für E_+ und E_- , die aber noch miteinander gekoppelt sind.

Durch Erfüllung der Rotationsbedingungen (52), (53) und (54) wird die Kopplung beseitigt und man bekommt (56) mit $\alpha_{\pm}' = \alpha'^2 \equiv \alpha'^2$, also zwei voneinander unabhängige Diff.-Gln. für E_+ und E_- .

Gilt die Quasiorthogonalitätsbedingung (38) $\operatorname{tg} \beta_+ \cdot \operatorname{tg} \beta_- = -1$, also $\beta_+ = \beta_- - \pi \equiv \beta$, so erhält man aus dem Wellengleichungssystem (15), (16) mit Berücksichtigung der Transformation (39) und den Koordinatenbedingungen (47) und (48) das System (57) mit β an Stelle von α und Π_{\pm} an Stelle von E_{\pm} . Als Lösung ergibt sich (für $\beta \neq 0$)

$$\frac{\Pi_{\pm}''}{h_1^2} + [\] \Pi_{\pm}' + \left(\{ \} - \frac{\beta'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_{\pm} \right) \Pi_{\pm} \mp \left[\frac{2\beta'}{h_1^2} \Pi_{\mp}' + \left(\frac{\beta''}{h_1^2} + [\] \beta' \right) \Pi_{\mp} \right] = 0. \quad (59)$$

Die Erfüllung der Rotationsbedingungen (52), (53) und (54), die genau so für β_{\pm} wie für α_{\pm} lauten, beseitigt die Kopplung und man bekommt

$$\frac{\Pi_{\pm}''}{h_1^2} + [\] \Pi_{\pm}' + (\{ \} + k_0^2 w_{\pm}) \Pi_{\pm} = 0. \quad (60)$$

Formal ist das Gleichungssystem (59) genau so gebaut wie das unter der Orthogonalitätsbedingung (32) gültige (58). Der Unterschied liegt in den ver-

schiedenen Bedeutungen der abhängig Variablen E_{\pm} bzw. Π_{\pm} und der Winkel α bzw. β .

Im ersten Falle werden die beiden E -Koordinaten E_2, E_3 zu einem geometrischen Vektor $E_{23} = E_2 + E_3$ zusammengefaßt, im zweiten Falle zu der komplexen Größe $\overline{E_{23}} = E_2 + i E_3$. Hierdurch entstehen auch die verschiedenen Winkeldefinitionen für α (28) und β (37). Wollte man im zweiten Falle [unter der Quasiorthogonalitätsbedingung (38)] ebenfalls mit dem geometrischen Vektor $E_{23} = E_2 + E_3$ und den Winkeln α_{\pm} rechnen, so müßte man das allgemeine (und sehr komplizierte) Gleichungssystem (45), (46) verwenden.

Nur im Falle der Gültigkeit von Koordinaten- und Rotations-Bedingungen wird das mit dem geometrischen Vektor E_{23} erhaltene Gleichungssystem (56) genau so einfach wie das mit der komplexen Größe $\overline{E_{23}}$ erhaltene System (60).

Man kann die beiden Gleichungen (59) in formale Übereinstimmung bringen durch Verwendung der Ausdrücke

$$\beta' \equiv i \frac{\left(\frac{E_3}{E_2} \right)'}{1 - \left(\frac{E_3}{E_2} \right)^2} = i \gamma' \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \Pi_+ &= \pi_+, \\ \Pi_- &= i \pi_- \end{aligned} \quad (61)$$

(vgl. Davids⁹). Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{\pm}''}{h_1^2} + [\] \pi_{\pm}' + \left(\{ \} + \frac{\gamma'^2}{h_1^2} + k_0^2 w_{\pm} \right) \pi_{\pm} \\ + \frac{2\gamma'}{h_1^2} \pi_{\mp}' + \left(\frac{\gamma''}{h_1^2} + [\] \gamma' \right) \pi_{\mp} = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Für anregende Diskussionen danke ich den Herren Prof. Försterling und Dr. Rawer.